

Jens Mammen

Psykologisk Institut, Aarhus Universitet

Om frihed og frihedsgrader

Jeg har koncentreret mig om at finde ud af, hvordan den model for de psykiske niveaus forskellige antal frihedsgrader, af forskellig art, som Bertelsen bygger i sin artikel, egentlig ser ud, og om jeg kan få den til at hænge sammen og til at passe på sit genstandsområde.

Begrebet frihedsgrader er, som Bertelsen også gør opmærksom på (s.21), hentet fra matematik og fysik. Hvis vi har et antal variable, der er forbundet i en (formél eller materiél) afhængighed, har sættet af variable færre antal frihedsgrader end antallet af variable. Hvis f.eks. variablene *masse*, *rumfang* og *massefylde* for et givet legeme er forbundet med ligningen $massefylde = masse/rumfang$, så har variabelsættet (*masse*, *rumfang*, *massefylde*) tre variable, men kun to frihedsgrader. Vi kan vælge to af variablenes værdi frit og uafhængigt af hinanden, men derefter er den tredje variabels værdi fastlagt. I almindelighed vil det gælde, at hvis n reelle variable er forbundet med b ligninger (b for bånd), så har variabelsættet, der består af de n variable, $f=n-b$ frihedsgrader. Man siger også, at løsningsmængden til ligningssystemet har dimensionen f .

Det ses, at $b+f=n$. For givet n vil antallet af bånd og antallet af frihedsgrader om ikke være "omvendt proportionale" (s. 25) i streng betydning (altså bundet af et fast produkt), så dog være bundet af en fast sum.

For ikke at tynde fremstillingen med for meget uanskelig matematik, vil jeg vælge et billede til illustration af ovenstående, og endda et billede eller måske rettere en model, som samtidig - så vidt jeg kan se - egner sig til at illustrere en hierarkisk organisation som den, Bertelsen diskuterer.

Forestil jer en uro, altså en af disse ting til pynt og underholdning, som man kan have hængende ned fra loftet. Øverst er der en snor til en krog i loftet. I den nederste ende af denne snor er der fastgjort en stiv pind, som i hver ende har fastgjort en snor, der i den nederste ende igen er fastgjort til en pind, o.s.v., indtil der i de nederste ender af alle snorene til sidst hænger en dims, f.eks. en nisse, en fugl, en engel m.m. Lad os tænke os en uro med tre "lag" pinde. Den vil i alt have 15 snore, syv pinde og otte dimser.

Hver af dimserne kan indtage enhver position inden for et vist område under loftet, og den kan dreje om sin egen akse. Taget for sig er der for hver dims fire frihedsgrader, svarende til de tre rumkoordinater og en værdi for dens drejningsretning eller orientering. Og taget under ét kan vi til ethvert tidspunkt beskrive placeringen og orienteringen af samtlige otte dimser ved et sæt bestående af $8 \times 4 = 32$ variable.

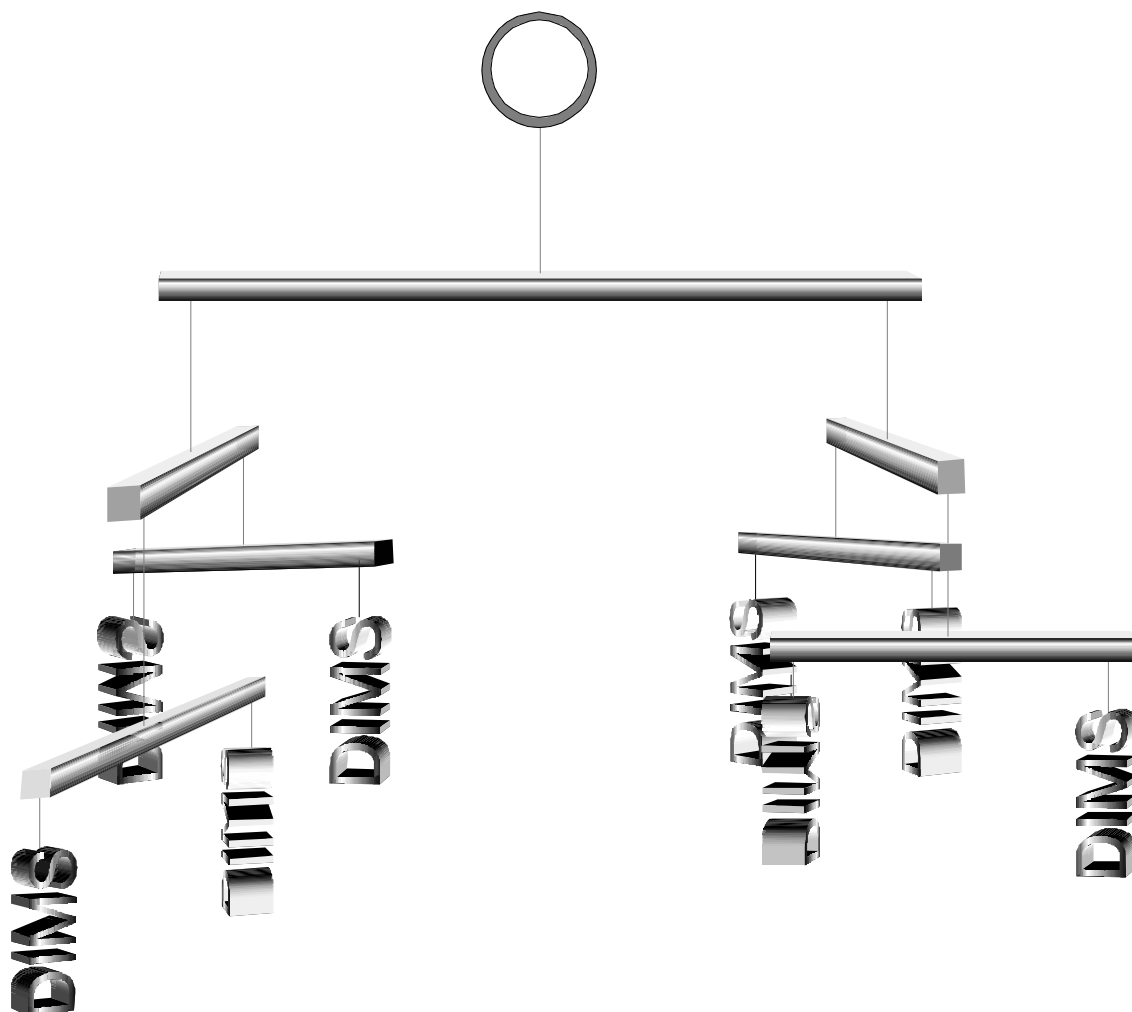
Når disse 32 variable ligger fast, er resten af systemet også fastlagt, idet vi forudsætter, at alle snorene skal være lodrette. Hvis vi holder fast i de otte dimser, kan hverken pindene eller snorene altså bevæge sig.

Men hvor mange frihedsgrader har nu dette samlede variabelsæt? Det er klart, at de stive pinde og de faste snorelængder lægger visse bånd på systemet. Det ses i øvrigt, at de 15 snore ingen rolle spiller for systemets frihed eller bånd. Der ville ikke ske nogen principiel ændring af systemet ved at erstatte alle snorene med et kugleled direkte mellem pindene.

Systemet har faktisk 22 frihedsgrader. Det ses ved, at den øverste pind har to frihedsgrader, nemlig retning og hældning. Givet den øverste pinds position har hver af de to pinde på mellemniveauet også to frihedsgrader, og tilsvarende for de fire pinde på nederste niveau, altså i alt for pindene $2+4+8=14$ frihedsgrader. Dertil kommer, at hver af de otte dimser kan dreje om sig selv uafhængigt af de andre. Altså alt i alt $14+8=22$ frihedsgrader. Det fandt vi ud af ved så at sige skridt for skridt at fastlåse systemet ovenfra og ned.

Når systemet beskrevet ved dimsernes position og retning har 32 variable og 22 frihedsgrader, må der altså være $32-22=10$ bånd på systemet. Kan vi nu identificere disse bånd? Ja, det er let nok. De syv af båndene skyldes de syv pinde, som hver for sig binder to positioner til hinanden i en ligning, og de sidste tre bånd skyldes de tre faste koordinater i loftskrogen. Hvis vi løftede uroen af krogen og gik frit rundt med den, ville den nu i stedet have $22+3=25$ frihedsgrader og $10-3=7$ bånd, svarende til de syv pinde, hvor igen $25+7=32$ stadig svarer til antallet af variable.

Vi kunne godt inddrage flere variable i beskrivelsen, f.eks. nye variable til beskrivelse af pindenes positioner. Men for hver ny variabel ville der være et nyt bånd (et "vertikalt" bånd i Bertelsens terminologi), som kobler den nye variabel til de allerede inddragne variable. Differensen mellem antal variable og antal bånd ville være uændret og stadig lig med systemets *antal frihedsgrader*, som altså er en *invariant* for det givne system (så længe vi ikke piller ved det), uafhængig af antallet af beskrivende variable, vi har valgt. Det er dette invariansforhold, som i det hele taget begrundet begrebet frihedsgrader. Hver gang vi derimod har valgt en beskrivelse ud fra et givet antal variable, vil summen af antal frihedsgrader og antal bånd være invariant lig med antallet af variable, selv om vi piller ved systemet, løfter det af krogen eller holder på en pind. Hvert nyt bånd vil derfor fjerne en frihedsgrad. Hvert fjernet bånd vil give en ekstra frihedsgrad.



Alt dette er "brutto-betragtninger" for hele systemet under ét. Kan vi nu på samme måde sige noget om de forskellige lag eller niveauer i uroen? Ja, det antydede jeg i hvert fald, da jeg ovenfor "skridt for skridt" regnede mig frem til de 22 frihedsgrader for hele systemet, når det hang i loftet. Lad os prøve det samme for det tilfælde, hvor uroen er løftet af kroge. De nu i alt 25 frihedsgrader kan fordeles med tre, som kommer fra, hvor vi holder hele uroen, to kommer fra øverste pindes position, fire fra mellemste niveaus to pinde, otte fra nederste niveaus fire pinde og endelig otte fra de otte dimser. Vi kan således også se, hvordan systemets antal frihedsgrader skridt for skridt vil blive begrænset, hvis vi begynder at "fikser" det oppefra og ændre frihedsgrader til bånd, f.eks. hænger uroen fast og tilmed sætter fingeren på de tre øverste pinde. Så vil der kun være $25-9=16$ frihedsgrader tilbage.

Helt så enkel er situationen imidlertid ikke, hvis vi indfører nye bånd ved alene at låse variable fast på de lavere niveauer. Bruttoregnskabet vil dog stadig passe. Hvert nyt bånd fjerner en frihedsgrad fra det samlede system. Men det er ikke længere enkelt at sige, hvordan konsekvenserne er fordelt på niveauerne. Hvis vi f.eks. fjerner otte frihedsgrader ved blot at forhindre dimserne i at dreje om sig selv, har det ingen konsekvenser for dimsernes og pindenes position. Resten af uroen kan bevæge sig som før. Hvis vi derimod fjerner otte frihedsgrader ved at sørge for, at alle otte dimser holder sig i et givet plan, f.eks. op ad en rude, vil det lægge bånd på friheden på alle niveauer.

Så meget om uro-modellen. Lad os nu se, om den kan bruges til at belyse begrebet frihedsgrad, som Bertelsen bruger det i sin hierarki-model af psyken.

Første eksempel på eksakt anvendelse af begrebet frihedsgrad er (s.24) i forbindelse med Polanyi's greb om

en mekanisk maskine. Uroen er en sådan maskine, så her skulle pengene gerne passe. Uroen er netop bygget af en række elementer med et overordnet formål, i dette tilfælde en bestemt balance mellem på den ene side fri og uordnet bevægelse og på den anden side en stabil struktur, der holder elementerne samlet. Og de(t) højere lag lægger "en udvælgende begrænsning ned over de(t) lavere lags mangfoldighed af muligheder" (s. 24). Det højeste lags særlige form ("emergensform", s. 24), nemlig at kunne sidde fast på trods af delenes frie bevægelse, sikres netop ved den sindrige sammensætning af pindene og deres særlige "begrænsning af lavniveau-mulighederne" (s. 24).

Det siges derefter, at den organiserende begrænsning ikke betyder en indsnævring af "friheden". I uro-modellen med givet antal variable n vil antallet af organiserende begrænsninger eller bånd dog betyde en tilsvarende indsnævring i antallet af frihedsgrader, da $f+b=n$. Imidlertid er "frihed" nok ikke her helt det samme som antal frihedsgrader. Frihed ser snarere ud til at have at gøre med de højere niveauers mulighed for at båndlægge de lavere ved at pålægge dem et antal bånd eller såkaldte "organiserende frihedsgrader". Og her er det klart, at et stort og komplekst system med mange variable tillader flere sådanne bånd, hvis vi tænker os f ligge fast, jfr. $b=n-f$. "Antallet af organiserende frihedsgrader øges med emergensen til højere organiserende niveauer" (s.25). Det passer godt med, at det især er båndene på de højere niveauer, som sættes i forbindelse med frihed i ovennævnte betydning. Heroverfor sættes så frihedsgraderne i den oprindeligt matematisk-fysiske betydning, som nu kaldes de *konstituerende* frihedsgrader. Det er dem, hvis antal jeg har betegnet med f . Endelig siges de to slags frihedsgrader at være "omvendt proportionale", hvilket kunne svare til, at for givet antal variable n er b og f "komplementære" ved at være bundet af summen n , idet som sagt $b+f=n$. Hvis b øges, mindskes f , dvs. vores konstituerende frihedsgrader båndlægges. Samtidig øges altså b , dvs. vores organiserende frihedsgrader (jfr. S. 24).

De organiserende frihedsgrader må imidlertid skelnes fra *moralens* frihedsgrader. Med mange organiserende frihedsgrader øger man muligheden for at indgå i moralske forpligtelser. Men alligevel er forholdet mellem de organiserende og de moralske frihedsgrader igen "omvendt proportional". Det kan lyde kryptisk. Men lad os nu igen sige, at de organiserende frihedsgrader er antallet af bånd på de høje niveauer, hvor der som sagt i et stort og komplekst system (med et stort n) er plads til mange sådanne bånd. Som i uroen kan disse bånd tilvejebringes på to måder, som interne bånd i form af pinde og som eksterne bånd i form af en fast forbindelse til et ophængningspunkt eller et andet system uden for uroen, som "sætter en finger" på en pind eller en dims. Et bånd i form af en sådan fast forbindelse, eller "forpligtelse" betyder yderligere en reduktion i f . Hvis vi imidlertid holder n og f (og dermed b) fast, vil vi se et komplementært eller "omvendt proportional" forhold mellem de to slags båndlæggelser. Måske menes der, at hver gang vi binder os moralsk, og reducerer f med en størrelse, der dermed retrospektivt kan anskues som reduktion i moralsk frihed, så øger vi de høje niveauers båndlæggelse af de lavere, jfr. s. 34: "I og med at vi åbner os stadigt mere for den

verden, vi er forbundet med, øger vi antallet af organiserende frihedsgrader samtidig med, at vi sænker antallet af moralens frihedsgrader".

Jeg synes ikke altid, at det bliver præciseret, hvad der tænkes holdt konstant, og hvad der tænkes varieret. Og det generer mig, at visse bånd bliver kaldt frihedsgrader. Men jeg synes godt, at jeg med nogen anstrengelse kan få det til at hænge sammen i min simple model, selv om jeg ind imellem kan være i tvivl om min udlægning.

Jeg tror også godt, jeg kan forstå påstanden (s.26) om, at forudsigelighed og uforudsigelighed "går på tværs af niveauerne", idet uforudsigelighed sammenkædes med frihedsgrader. Mængden af frihedsgrader kan nemlig ofte ikke lokaliseres i systemet til bestemte variable, men er "distribueret" ud over systemets variable. Antal frihedsgrader er som sagt en bruttoegenskab ved hele systemet.

Dette leder hen til en sammenholden af begrebet frihedsgrader og begreberne om "hårde" og "bløde" lovmæssigheder, hvor det flere steder (f.eks. s.4, 18, 43) hævdes, at de lavere niveauer i psyken er karakteriseret ved hårde eller deterministiske lovmæssigheder, mens de højere er karakteriseret ved bløde eller ikke/svagt-deterministiske lovmæssigheder. Hvordan skal det nu forstås? I denne sammenhæng vil jeg ikke gå dybere ind i spørgsmålet, men nøjes med at konstatere, at et system eller en del af et system kan beskrives deterministisk, hvis antallet af dets indre og ydre bånd er lig med antallet af variable i systemet. I så fald er dets frihedsgrad nul. Et system med n variable og b indre bånd har uden ydre bånd $f=n-b$ frihedsgrader. For at blive deterministisk skal det altså yderligere påføres f ydre bånd. For en nærmere diskussion af determinisme i åbne og lukkede systemer, se Mammen (1969).

Et hierarkisk system som vores uro kan som sagt beskrives ved et sæt variable (nemlig for alle "dimsernes" position og orientering), som dermed bestemmer hele systemets tilstand. Dette er definitions-mæssigt en beskrivelse på "laveste" niveau. I denne beskrivelse var der som sagt 32 variable, som var pålagt syv indre bånd, således at der stadig var 25 frihedsgrader i systemet. Der skal altså yderligere 25 ydre bånd til for at gøre systemet deterministisk. Men herefter er der ingen frihedsgrader tilbage i systemet og derfor heller ikke nogen mulighed for ikke-deterministiske eller "bløde" lovmæssigheder på de højere niveauer. Kort sagt, i et system, der beskrives så eksakt, at det er meningsfuldt at bruge begrebet frihedsgrader, kan det ikke hævdes, som Bertelsen gør, at der gælder deterministiske love på laveste niveau, men ikke på de højere.

Eller omvendt, hvis der er bløde lovmæssigheder på de højere niveauer, så må der nødvendigvis også være det på de lavere, som ikke kan indeholde færre frihedsgrader end de højere niveauer, i hvert fald ikke færre såkaldte "konstituerende" frihedsgrader, og det må være den relevante slags frihedsgrader i forbindelse med en skelnen mellem deterministiske ("hårde") og ikke-deterministiske ("bløde") lovmæssigheder.

Min diskussion kan synes noget fjern fra det psykologiske sigte med Bertelsens artikel (selv om det vel ikke kan udelukkes, at det i en terapeutisk situation kan komme frem, at et moralsk valg som f.eks. ægteskabet i

Bertelsens eksempel, s 28 og 34, kan føles som at være hængt op på en krog i loftet). Men jeg mener, at man bør tages på ordet, når man benytter begreber, som primært er defineret inden for mere naturvidenskabelige rammer. Jeg mener også, at min model på en anskuelig måde fanger indholdet i begreberne om frihedsgrader, indre og ydre bånd, og at en model er nødvendig, hvis ikke vi skal lade os nøje med en metaforisk brug af begreberne.

Referencer

Mammen, J. (1969). Menneskets frihed - det frie menneske.
Dansk Psykolognyt, 23, 295-299.