Om at træffe korrekte afgørelser

Jens Mammen

En central genstand for kognitionspsykologiens undersøgelser er vore muligheder for at træffe *korrekte afgørelser.*

Lad os i første omgang se på sådanne relativt simple afgørelser som f.eks. »Peter er et menneske«, »Dette menneske er Peter«, »Denne blyant er mellem 7 og 8 cm lang«, »pi er et irrationelt tal«, »Der er 7 æbler i skålen«.

Det væsentlige i disse eksempler som udgangspunkt for den følgende analyse er ikke deres sproglige form, som den er gengivet her, men derimod, at det er afgørelser, der er korrekte eller ukorrekte. Ligeledes er det i første instans ikke væsentligt, om afgørelserne er truffet ved hjælp af vore sanser, fornuft eller viden.

Lad os kalde sådanne afgørelser for *klassifikatoriske afgørelser.* Det ses af eksemplerne, at de omfatter såvel afgørelser, der sædvanligvis ville kaldes for *kategoriseringer,* f.eks. »Peter er et menneske« eller prædikationer, f. eks. »Dette menneske er Peter«.

At vi faktisk foretager sådanne afgørelser, at de kan være *korrekte* eller *ukorrekte,* og at vi kan vide, om de er det ene eller det andet, er en kendt sag fra dagligdagen. At benægte den vil føre til selvmodsigelser. At mange filosofiske og psykologiske teorier de facto benægter disse kendsgerninger, indtager et såkaldt agnosticistisk standpunkt, vender vi tilbage til senere. Det behøver ikke interessere os i første omgang.

F. eks. mødes påstande om, at en erkendelse kan være absolut sand, eller at en perception kan være fejlfri, ofte med skepsis, måske fordi man mener, at der dermed er sagt, at al erkendelse er eller kan være absolut sand eller absolut udtømmende i en eller anden forstand.

Men når jeg f.eks. siger, at jeg fra vinduet på mit kontor kan se, at der står en bil på parkeringspladsen, så er det et eksempel på en fejlfri perception, hvis der faktisk står en bil på parkeringspladsen, og hvis jeg har brugt mine øjne til at afgøre, at det er tilfældet. Hvilken fejl skulle jeg have begået? Noget andet er, at jeg f.eks. ikke kan se præcis, hvor høj bilen er. Men det har jeg heller ikke konstateret, eller skulle konstatere, for at afgøre, at der står en bil.

Hvis jeg siger, at jeg kan se, at bilen er mellem én og to meter høj, så kan det også udmærket være en fejlfri perception. Hvis derimod jeg siger, at bilen er præcis 1,5 meter høj, er påstanden næsten dømt til at være fejlagtig. Hvis jeg laver en grov inddeling af bilers højde i forskellige intervaller, kan jeg sagtens foretage en korrekt afgørelse af, hvilket interval bilens højde falder i Hvis jeg derimod vil angive højden med et enkelt tal, og ikke i virkeligheden underforstår en sådan intervalinddeling, så er det usandsynligt, at jeg skulle have ramt rigtigt. En yderligere undersøgelse vil altid kunne underkende en foreløbig bekræftet afgørelse. Enhver afgørelse er i dette tilfælde kun foreløbig, relativ, sand. Nogle typer afgørelser er altså eller kan være *absolut sande,* korrekte, andre kan kun være *relativt sande* eller korrekte. Det er naturligvis vigtigt, at en teori for, hvorledes vi træffer den slags afgørelser ved hjælp af vore sanser, begreber og fornuft ikke kommer til de facto at benægte dette forhold mellem absolut og relativ sandhed, f.eks. ved at erklære al sandhed for relativ, dvs. at ingen afgørelse kan afsluttes med et éntydigt resultat, eller på den anden side erklære al sandhed for absolut, dvs. at enhver afgørelse kan afsluttes med et éntydig resultat f.eks. i løbet af et endeligt antal delafgørelser.

Det er bl.a. dette problem, der skal behandles i det følgende. Det er ret indlysende, at det har noget at gøre med dels, hvor *mangfoldige* klasser virkelighedens ting og processer falder i, dels noget med, hvorledes de kan *adskilles* fra hinanden i nogle klasser, som der kan træffes afgørelser imellem.

Som et eksempel fra matematikken på *mangfoldighed* kan vi se på tallene fra 1 til 10. Der er ti elementer i mængden. Det er en *endelig* mængde. En mængde, der er en ægte *del* af den, f.eks. de lige tal fra 2 til 10, indeholder færre elementer. En mængde, hvis elementer kan *parres* med elementerne i mængden, indeholder lige så mange elementer som den selv, nemlig ti. Vi kan tælle os frem til ethvert element i mængden, og vi kan få talt dem alle sammen.

Et eksempel på en *uendelig* mængde er alle de hele positive tal. Til forskel fra en endelig mængde, gælder det ikke mere, at en mængde, der er en ægte del af mængden, f.eks. alle de lige positive tal, indeholder færre elementer. De kan, ved henholdsvis at dividere og gange med to, parres med elementerne i hele mængden. Vi kan heller ikke længere tælle alle elementerne i mængden, men vi kan stadig tælle os frem til et hvilket som helst element. De hele positive tals mængde er *tællelig*. Enhver mængde, hvis elementer kan parres med de hele positive tal er ligeledes tællelig. F.eks. er mængden af alle rationale tal tællelig. Der er altså ikke flere rationale tal, end der er hele tal.

Men der er også uendelige mængder, der *ikke* er *tællelige*, f.eks. mængden af alle reelle tal, dvs. alle uendelige decimalbrøker. Der er altså virkelig flere reelle tal, end der er rationale tal.

Hvad nu angår muligheden for at *adskille* og opdele mængder, så afhænger det af deres mangfoldighed, sådan at det er sværere at adskille mere mangfoldige mængder end mindre mangfoldige. Men mulighederne for adskillelse afhænger også af mængdernes struktur.

I det følgende skal der forsøges at behandle dette problem så enkelt som muligt, og med så få begreber og antagelser om verdens indretning som muligt, uden at de vigtigste teoretiske adskillelser går tabt. Det er med vilje, at jeg undgår at tale om kvaliteter ved ting og processer, andet end eventuelt som eksempler, og ligeledes undgår at forudsætte kvantificeringer af sådanne kvaliteter.

I virkeligheden starter jeg med den udvidelse af den almindelige klasselogik, som jeg skal ende med, nemlig udvidelsen med begrebet »afgørbarhed«, og undersøger, hvilken logik der kan udledes heraf. Ekspliciteringen af indholdet af begrebet »afgørbarhed« og dets forbindelse til mangfoldighed og andre begreber må så følge senere.

Jeg håber, at de nedenstående trivielle eksempler er illustrative, og at læseren selv er i stand til både at lade eksemplerne hjælpe til at få lidt kød på begreberne, samtidig med at kødet ikke forveksles med skelettet.

Den store fordel ved at starte på denne måde består i, at det er muligt for mig at afbilde de afgørbare klasser på de åbne mængder i et topologisk rum, i hvilke der gælder en lang række sætninger, som direkte kan udnyttes i fremstillingen, men som jeg vil gemme til det mundtlige oplæg med adgang til kridt og tavle.

Lad os nu først undersøge en særlig type afgørelser svarende til eksemplet ovenfor »Denne blyant er mellem 7 og 8 cm lang«, nemlig den særlige type afgørelser, vi kalder for *måling*.

Uden at gå for dybt i de tekniske detaljer kan *grundoperationen* i måling af f.eks. *længde* bestå i at *sammenligne* en given længde med en given anden længde, en standard, og dernæst *afgøre*, om den givne længde er længere end standarden, eller om den er kortere end standarden.

Lad os endvidere gå ud fra, som en her ubevist påstand, at

> *1) hvis den givne længde er længere eller kortere end standarden, så kan det også afgøres,*

mens derimod

> *2) hvis den givne længde netop er lig med standarden, så kan det ikke afgøres, om den er længere end eller kortere end, eller om den er lig med standarden.*

> Hvis vi nu har mulighed for at vælge blandt uendeligt mange standarder efter nogle bestemte principper, vil det være muligt for os efterhånden at finde standarder, der ligger så tæt over og under den givne længde, som vi må ønske, og dermed få fundet et vilkårligt snævert interval, som længden ligger i. Men denne egenskab ved måling interesserer os ikke i første omgang.

Hvis vi nu har to forskellige standarder, definerer de et (åbent) interval. For dette interval gælder det nu som følge af ovenstående påstande, at for en hvilken som helst given længde har vi, at hvis den ligger i intervallet (altså er længere end den ene standard og kortere end den anden), så kan det afgøres. Det samme gælder for et interval defineret ved alle længder, der er større end (eller mindre end) en given standard. Et sådant interval er et eksempel på en *afgørbar klasse,* dvs. en klasse, hvor der for enhver instans af klassen kan afgøres, at den er med i klassen. (Læg mærke til, at det ikke for en afgørbar klasse behøver at gælde, at det for instanser, der ikke er med i klassen, kan afgøres, om de ikke er med!).

Hvis vi nu har en mængde sådanne klasser, kalder vi det en *inddeling,* og vi siger, at inddelingen er *afgørbar,* hvis det for hver eneste klasse gælder, at det er en afgørbar klasse, altså i vores eksempel hvis det gælder, at når en given længde falder i et af intervallerne, så kan det også afgøres. Figur 1 og figur 3 nedenfor er eksempler på afgørbare inddelinger.

Hvis det for inddelingen gælder, at ingen længde kan falde i to intervaller, siger vi, at inddelingen er *éntydig.* Figur 1 og figur 2 nedenfor er eksempler på éntydige inddelinger.

Hvis endelig en inddeling består af en sådan mængde intervaller, at en hvilken som helst længde falder i mindst ét af intervallerne, siger vi, at inddelingen er *udtømmende.* Figur 2 og 3 nedenfor er eksempler på udtømmende inddelinger.

Vi definerer nu en *effektiv* inddeling som en inddeling, der både er afgørbar, éntydig og udtømmende.

Idet vi nu holder os til den type inddelinger, der er etableret ved de afgørelser, som vi har beskrevet i forbindelse med måling, gælder det som en påstand, der foreløbig ikke bevises, at

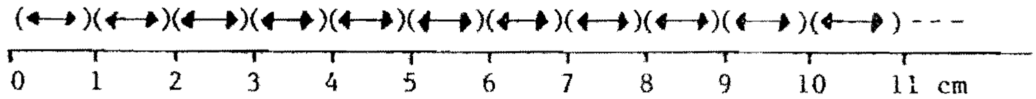
3) ingen inddeling af længder ved måling er effektiv.

Hvis vi f.eks. deler længder op i dem under 1 cm, dem mellem 1 cm og 2 cm, dem mellem 2 cm og 3 cm, etc. (se figur 1), får vi en afgørbar og éntydig inddeling, men den er ikke udtømmende. Længder på netop 2 cm er f.eks. ikke med i noget interval.

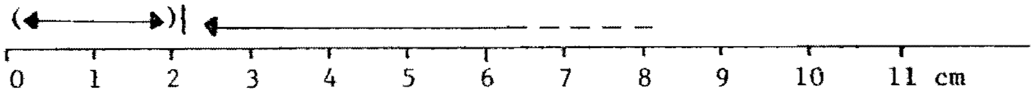
Deler vi derimod længder ind i dem under 2 cm og dem, der er lig med eller over 2 cm (se figur 2), får vi en éntydig og udtømmende inddeling. Men den er ikke afgørbar. Der kan ikke træffes nogen afgørelse for nogen af de to intervallers vedkommende, hvad angår længden på netop 2 cm.

Deler vi endelig f.eks. alle længder ind i dem, der er mellem 0 og 2 cm, dem, der er mellem 1 cm og 3 cm, dem, der er mellem 2 og 4 cm, dem, der er mellem 3 cm og 5 cm osv. (se figur 3), så har vi en inddeling, der er afgørbar og udtømmende, men den er ikke éntydig. En længde på f.eks. 1,5 cm falder i to intervaller.

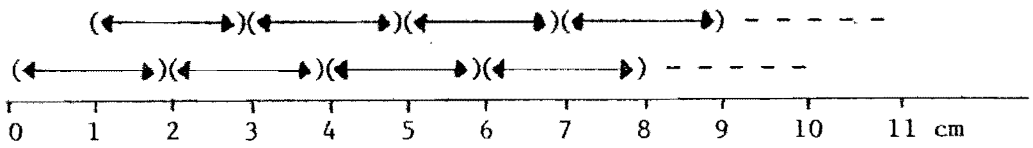
> Imidlertid drejer det sig om to nabointervaller, og da inddelingen efter det her antydede princip kan gøres så finmasket, det skal være, ses det, at det forhold, at der eksisterer en metrik, en »naboskabsstruktur« i mængden af intervaller, betyder, at den manglende éntydighed i en vis forstand overvindes. Men disse sider ved måling interesserer os ikke på dette trin af undersøgelsen.



Figur 1.
En afgørbar og éntydig, men ikke udtømmende inddeling.



Figur 2.
En éntydig og udtømmende, men ikke afgørbar inddeling.



Figur 3.
En afgørbar og udtømmende, men ikke éntydig inddeling.

Det bliver påstået ovenfor, at ingen inddeling af længder ved måling er effektiv. Dette indebærer, at det ikke er muligt at dele alle længder i to dele, dem, der er med i en klasse, og dem, der ikke er med i klassen, sådan at det for enhver længde kan afgøres, om den er med i klassen eller ej. En sådan klasse kaldes en *sammenhængende* klasse.

Der er ikke sagt meget om, hvorledes de afgørelser, der her tales om, faktisk udføres eller kunne tænkes udført. Det må antages, at en afgørelse kan være sammensat af flere andre afgørelser, og at ingen afgørelse kan være sammensat af uendelig mange andre afgørelser. Men bortset herfra er »afgørelse« og »afgørbarhed« indtil videre et udefineret (primitivt) begreb i ræsonnementerne.

Alligevel vil jeg tillade mig at betragte måling (som et eksempel på en type afgørelse, hvortil der ikke svarer en effektiv inddeling) som et særtilfælde af den type afgørelser, som kan foretages af dyrs og menneskers sanseorganer, og som kan foretages af livløse systemer som f.eks. automater.

Det påstås altså, at ingen af processerne i vore sanseorganer eller i den livløse natur er i stand til at foretage effektive inddelinger.

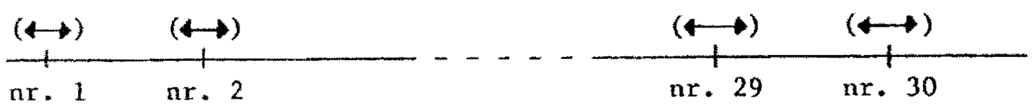
IDENTIFIKATION

Lad os nu se på en anden type afgørelser, nemlig afgørelser af typen »Dette menneske er Peter«, altså sådanne afgørelser, som vi plejer at kalde *identifikationer*. I en vis forstand er det vanskeligere afgørelser end målingerne. Inddelingen af alle genstande i »Peter« og »alt, hvad der ikke er Peter« er éntydig og udtømmende, men er den afgørbar? Hvis afgørelsen skal træffes ved måling, er den tydeligvis ikke afgørbar. Hvor snæver og mangedimensional en klasse vi end definerer ved måling, kan der altid være andre individer et eller andet sted i universet, der passer til den ligesom Peter. På den anden side, har vi først fat i Peter og holder ham i hånden, så kan vi uden at behøve at måle let afgøre, hvad der er Peter, og hvad der ikke er Peter. Helt præcist kan det udtrykkes således, at i det tilfælde, hvor vi kan følge Peters bevægelser (direkte ved observation eller ved hjælp af en viden om bevægelserne), så kan vi, hver gang vi har en klasse individer, om hvilken vi ved, at netop ét af dem er Peter, afgøre, hvilket det drejer sig om. (Spørgsmålet er altså ikke, om snavset under Peters negle hører med til Peter osv.). Så i dette tilfælde, dvs. så længe vi kan følge Peters bevægelser, således at vi kan finde ham igen, så er inddelingen Peter/ikke-Peter en effektiv inddeling.

NUMMERERING AF INDIVIDER OG AF KLASSER

Lad os nu se på en tredie type afgørelser.

Vi kan forestille os en lærer, der har en klasse med 30 elever. Disse elever vil have hver deres særpræg, så de kan kendes fra hinanden. For enkelhedens skyld kan vi tænke os, at ikke to af børnene har samme højde. Det vil nu være muligt at finde en éntydig og afgørbar inddeling af højder (bestående af 30 adskilte åbne intervaller), således at der falder netop ét barn i hver af de afgørbare klasser. Se figur 4!



nr. 1 nr. 22 nr. 29 nr. 30

Børnene i klassen er et eksempel på en *diskret* mængde, dvs. en mængde, hvor der findes en éntydig, afgørbar inddeling, således at hver klasse i inddelingen indeholder netop ét element fra mængden. *Enhver endelig mængde er diskret.*

Nummereringen af børnene er samtidig en nummerering af de klasser, der udgør en éntydig og afgørbar inddeling, og som hver (foruden meget andet) indeholder netop ét af klassens børn.

Uden at det skal bevises her, gælder det generelt, at i enhver éntydig, afgørbar inddeling kan klasserne nummereres, også selv om der er uendelig mange. Mængden af klasser er altså tællelig. Specielt kan klasserne i en effektiv inddeling nummereres.

Men omvendt behøver en inddeling, hvis klasser kan nummereres, hverken at være éntydig eller afgørbar.

Det gælder altså, at *enhver diskret mængde er tællelig*. Men det er ikke enhver tællelig mængde, der er diskret. F.eks. er mængden af rationale tal ikke diskret, mens mængden af hele positive tal er diskret.

En mængde kan ikke både være sammenhængende og diskret (bortset fra det tilfælde, hvor den kun har ét element), men den kan godt være ingen af delene, nemlig hvis den f.eks. består af indbyrdes adskilte sammenhængende mængder, som vist i figur 1.

Inddelingen af børnene som vist i figur 4 er ikke selv en effektiv inddeling, da den jo, ifølge hvad der er sagt ovenfor, ikke på én gang kan være éntydig, afgørbar og udtømmende.

Men hvis nu læreren kan identificere sin klasse, som vi har defineret det i afsnittet om identifikation, altså hvis han kan følge, om ikke det enkelte barns bevægelser, så dog klassens (han kan f.eks. konstatere, at ingen børn har forladt klassen i timen, og at ingen er kommet til), og hvis han tilmed ved, at ingen af børnene vokser så meget i løbet af timen, at de forlader deres interval, så kan han i løbet af timen afgøre ethvert barns nummer. Det vil endda være sådan, at denne afgørelse vil være effektiv. Inddelingen barn nummer 17/ikke-barn nummer 17 er effektiv i samme forstand, som inddelingen Peter/ikke-Peter var det i afsnittet om identifikation. Afgørelsen vil være sammensat af en effektiv identifikation svarende til inddelingen lærerens klasse/ikke-lærerens klasse og en afgørelse af barnets nummer på grundlag af en éntydig, afgørbar inddeling, der udtømmer lærerens klasse.

Vi har altså en effektiv inddeling med 31 klasser: barn nr. 1/ barn nr. 2/. . ./barn nr. 30/ikke-lærerens klasse.

Nummereringen af individer i en diskret mængde, som det er eksemplificeret her, svarer altså til en effektiv inddeling.

IDEALISATIONER

For fuldstændighedens skyld må vi også give et eksempel på den særlige type inddelinger, som består af idealisationer. Den klassiske geometris figurer er eksempler på sådanne idealisationer, f.eks. cirkler og trekanter. Men også et punkt på en ret linie er et eksempel på en sådan idealisation, f.eks. et punkt, der ligger i afstanden pi cm fra et andet punkt. Uden at gå for dybt ind i diskussionen af, hvad en sådan idealisation er, vil det være nærliggende at definere den som en klasse, der for det første ikke indeholder nogen afgørbar (ægte eller uægte) delmængde. For ingen af idealisationens instanser kan det afgøres, at de er elementer i idealisationen. Til gengæld kan det for det andet for ethvert element i en klasse, der ikke indeholder idealisationen, afgøres, at det ikke er et element i idealisationen.

> Hvis man tænker sig idealisationen som et punkt på den reelle talakse, svarer det til, at punktet ikke selv indeholder noget åbent interval, men at alt, hvad der ikke er punktet, til gengæld udgør åbne intervaller.

Hvis man nu har en diskret mængde idealisationer, findes der som nævnt ovenfor en afgørbar, éntydig og dermed tællelig inddeling, hvor hver klasse i inddelingen netop indeholder én idealisation. Et sæt repræsentanter fra hver af disse afgørbare klasser vil nu også være diskret og fungere som en *demonstration* af idealisationerne.

Når vi laver geometri på tavlen og kender den diskrete mængde af figurer, trekanter, cirkler osv., gør det ikke noget, at tegningen ikke er så god, for at vi ikke skal være i tvivl om, hvad den skal forestille.

Men nogen effektiv inddeling af alle mulige tegninger på tavlen er ikke mulig, hvor stor den diskrete mængde af idealisationer end er.

OM DEN BEVIDSTE MENNESKELIGE GENSPEJLING (AFBILDNING) AF DEN OBJEKTIVE REALITET

De ovenstående eksempler skulle have vist, at mulighederne for effektive inddelinger afhænger af strukturen og mangfoldigheden af det, der skal inddeles, og det blev påstået, at i forhold til de inddelinger, som sker via processerne i naturen og i sanseorganerne, er naturen sammenhængende. Den kan ikke inddeles effektivt. Først *menneskets* evne til at identificere en klasse, ikke blot ved dens »egenskaber«, men ved dens individuelle identitet med sig selv, muliggør for første gang *effektive inddelinger.* Først hermed er skabt grundlaget for en »tertium non datur« logik, men vel at mærke en logik, som stadig kun gælder under forudsætning af en underliggende effektiv inddeling.

Denne effektive inddeling er altid baseret på en fastholdelse af et konkret omfang eller på fastholdelse af et udvalg af klasser, f.eks. idealisationer, der igen er baseret på et fastholdt demonstrativt materiale, hvor indirekte det end sker.

De *begreber,* som mennesker har, og som ikke bare svarer til dyrenes sensorisk definerede inddelinger, genspejler effektive inddelinger, eller rettere, de rummer muligheden for at gøre det.

> Det er muligheden for en effektiv inddeling, der gør, at vi kan vide, »hvad en fugl er«, og som gør, at vi om et menneske kan sige »han ser, *at* der er en fugl på græsset« (et såkaldt epistemisk udsagn), hvorimod vi ikke vil udtale os på samme måde om et dyrs perception, eller om en computers kategoriseringer.

Den modellering af verden, som kan foretages i et nok så raffineret mekanisk system, f.eks. en computer, kan aldrig blive effektiv. Den er og bliver dømt til at repræsentere konkret omfang, som et aldrig realiseret konvergenspunkt for en uendelig række af afgørelser.

Når det for os kan tage sig ud, som om en computer kan foretage effektive afgørelser, skyldes det blot, at den grundlæggende udvælgelse og afgrænsning af det (ikke-sammenhængende) materiale, den skal operere på, allerede er foretaget af mennesker.

Det er fælles for computersimulation og den kognitive psykologi, at man undersøger, hvordan verden i sin mangfoldighed kan afbildes på en diskret mængde. Den ene side af denne afbildning, dén der er eksemplificeret ved måling ovenfor, er fælles for computeren og mennesket. Den anden side af denne afbildning, dén der er eksemplificeret ved identifikation ovenfor, er særegen for det bevidste menneske.

Netop fordi den ene side af afbildningen er fælles for maskinen, dyr og mennesker, er det dog vigtigt at studere dyrs og maskiners funktion.

De effektive inddelinger muliggør den præcise definition af undersøgelsesobjekter, der er grundlaget for erkendelsen af almene lovmæssigheder, der igen betinger den begrebsmæssige beherskelse af nye effektive inddelinger, der igen . . . osv. Dette blot for at antyde, hvorledes de effektive inddelinger er udgangspunktet for, at mennesket kan tilegne sig dialektikken mellem det enkelte og det almene.

Her er ikke plads eller tid til at gå dybere ind på disse perspektiver, f.eks. hvorledes det foregående igen er betingelsen for den begrebsmæssige tilegnelse af kvalitative forandringer.

Det må være nok her at antyde, hvorledes det empiriske studium af betingelserne for effektive inddelinger hos mennesker må se på, hvordan objektkonservation etableres hos børn, og hvorledes den efterhånden frigør sig relativt fra det sanselige. Vekselvirkningen mellem objektkonservation og sprogudviklingen må være central her. Hvorledes hænger objektkonservation sammen med en beherskelse af den sproglige repræsentation af begreberne, herunder især den side af ordene, der betegner begrebernes omfang og den side, der betegner deres indhold, eller simpelthen ordenes egenavns- og fællesnavnskarakter.

*   *
*